Introducción a la teoría del invariante de Hopf

Trabajo de Fin de Grado

Samuel M. A. Luque Astorga

10 de julio de 2024

Universidad Complutense de Madrid
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Supervisor: Jesús María Ruiz Sancho

Índice

Introducción y resumen

Introducción

- Hopf, 1930's: invariante de homotopía para aplicaciones entre esferas,
$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m \rightsquigarrow \mathrm{h}(f) \in \mathbb{Z}.$$
Análogo al grado de Brouwer para aplicaciones $M^m \to N^m$.
- Whitehead, 1947: fórmula integral (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $\mathrm{h} = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
  - Cálculo de grupos de homotopía ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
  - Estudio de campos vectoriales en física.

Introducción

- Hopf, 1930's: invariante de homotopía para aplicaciones entre esferas,
$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m \rightsquigarrow \mathrm{h}(f) \in \mathbb{Z}.$$
Análogo al grado de Brouwer para aplicaciones $M^m \to N^m$.
- Whitehead, 1947: fórmula integral (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $\mathrm{h} = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
  - Cálculo de grupos de homotopía ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
  - Estudio de campos vectoriales en física.

Introducción

- Hopf, 1930's: invariante de homotopía para aplicaciones entre esferas,
$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m \rightsquigarrow \mathrm{h}(f) \in \mathbb{Z}.$$
Análogo al grado de Brouwer para aplicaciones $M^m \to N^m$.
- Whitehead, 1947: fórmula integral (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $\mathrm{h} = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
    - Cálculo de grupos de homotopía ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
    - Estudio de campos vectoriales en física.

Introducción

- Hopf, 1930's: invariante de homotopía para aplicaciones entre esferas,

$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m \rightsquigarrow \mathrm{h}(f) \in \mathbb{Z}.$$

  Análogo al grado de Brouwer para aplicaciones $M^m \to N^m$.
- Whitehead, 1947: fórmula integral (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $\mathrm{h} = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
  - Cálculo de grupos de homotopía ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
  - Estudio de campos vectoriales en física.

Introducción

- Hopf, 1930's: invariante de homotopía para aplicaciones entre esferas,
$$f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m \rightsquigarrow \mathrm{h}(f) \in \mathbb{Z}.$$
Análogo al grado de Brouwer para aplicaciones $M^m \to N^m$.
- Whitehead, 1947: fórmula integral (nuestro punto de vista).
- Adams, 1960: solo existen aplicaciones con $\mathrm{h} = 1$ para $m = 2, 4, 8$, con consecuencias muy importantes.
- Otras aplicaciones:
  - Cálculo de grupos de homotopía ($\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$).
  - Estudio de campos vectoriales en física.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: varierdades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: varierdades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: varierdades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

1. Preliminares: varierdades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (cuerpo)

1. Preliminares: varierdades diferenciables, regularidad, homotopía, integración y cohomología.
2. Grado de Brouwer-Kronecker mediante integración.
3. Invariante de Hopf mediante integración.
4. **El invariante de Hopf es un número entero.**
5. Disgresión: definición mediante el número de enlace.

Resumen del trabajo (aplicaciones)

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:
   - Grupos de cohomotopía $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).
     Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \overset{\deg}{\simeq} \mathbb{Z}$.
   - Grupos de homotopía $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
   - Fibraciones de Hopf. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
   - En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo explícito $\pi_3(\mathbb{S}^2) \overset{\mathsf{h}}{\simeq} \mathbb{Z}$.

Resumen del trabajo (aplicaciones)

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:
    - Grupos de cohomotopía $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).
      Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \overset{\deg}{\simeq} \mathbb{Z}$.
    - Grupos de homotopía $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
    - Fibraciones de Hopf. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
    - En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo explícito $\pi_3(\mathbb{S}^2) \overset{\mathsf{h}}{\simeq} \mathbb{Z}$.

Resumen del trabajo (aplicaciones)

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:
   - Grupos de cohomotopía $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).
     Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \overset{\deg}{\simeq} \mathbb{Z}$.
   - Grupos de homotopía $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
   - Fibraciones de Hopf. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
   - En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo explícito $\pi_3(\mathbb{S}^2) \overset{\mathsf{h}}{\simeq} \mathbb{Z}$.

Resumen del trabajo (aplicaciones)

6. Aplicaciones de la teoría desarrollada:
   - Grupos de cohomotopía $[M, \mathbb{S}^k]$ (en particular, $\pi_p(\mathbb{S}^k)$).
     Teorema de Hopf: $[M, \mathbb{S}^m] \overset{\deg}{\simeq} \mathbb{Z}$.
   - Grupos de homotopía $\pi_{2m-1}(\mathbb{S}^m)$. Son infinitos para m par.
   - Fibraciones de Hopf. La fibración de Hopf compleja induce isomorfismos $\pi_n(\mathbb{S}^3) \simeq \pi_n(\mathbb{S}^2)$, $n \geq 3$.
   - En concreto, el invariante de Hopf es un isomorfismo explícito $\pi_3(\mathbb{S}^2) \overset{\mathsf{h}}{\simeq} \mathbb{Z}$.

El invariante es un número entero

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El invariante de Hopf de f es el número

$$\mathrm{h}(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha.$$

Propiedades:

- Es invariante por homotopía ($\rightsquigarrow$ definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $\mathrm{h} \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $\mathrm{h}(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $\mathrm{h}(f \circ g) = \mathrm{h}(f)\deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El invariante de Hopf de f es el número

$$\mathrm{h}(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha.$$

Propiedades:

- Es invariante por homotopía ($\rightsquigarrow$ definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $\mathrm{h} \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $\mathrm{h}(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $\mathrm{h}(f \circ g) = \mathrm{h}(f) \deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El invariante de Hopf de f es el número

$$\mathrm{h}(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha.$$

Propiedades:

- Es invariante por homotopía ($\rightsquigarrow$ definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $\mathrm{h} \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $\mathrm{h}(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $\mathrm{h}(f \circ g) = \mathrm{h}(f) \deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El invariante de Hopf de f es el número

$$\mathrm{h}(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha.$$

Propiedades:

- Es invariante por homotopía ($\rightsquigarrow$ definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $\mathrm{h} \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $\mathrm{h}(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $\mathrm{h}(f \circ g) = \mathrm{h}(f)\deg(g)$.

El invariante de Hopf: generalidades

Definición

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. El invariante de Hopf de f es el número

$$\mathrm{h}(f) = \int_{\mathbb{S}^{2m-1}} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha.$$

Propiedades:

- Es invariante por homotopía ($\rightsquigarrow$ definición para aplicaciones continuas).
- Si m es impar, $\mathrm{h} \equiv 0$.
- Si f es nulhomótopa, $\mathrm{h}(f) = 0$.
- Si $\mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{g} \mathbb{S}^{2m-1} \xrightarrow{f} \mathbb{S}^m$, $\mathrm{h}(f \circ g) = \mathrm{h}(f)\deg(g)$.

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a:

- $\mathrm{R}_f = \mathbb{S}^m \setminus f(\mathrm{C}_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset \mathrm{R}_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con b $\implies$ $f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien $\emptyset$).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} \mathrm{d}\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a:

- $\mathrm{R}_f = \mathbb{S}^m \setminus f(\mathrm{C}_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset \mathrm{R}_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con b $\implies$ $f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien $\emptyset$).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} \mathrm{d}\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a:

- $\mathrm{R}_f = \mathbb{S}^m \setminus f(\mathrm{C}_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset \mathrm{R}_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con b $\implies$ $f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien $\emptyset$).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} \mathrm{d}\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a:

- $\mathrm{R}_f = \mathbb{S}^m \setminus f(\mathrm{C}_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset \mathrm{R}_f$ $(U \equiv \mathbb{R}^n)$.
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con b $\implies$ $f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien $\emptyset$).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} \mathrm{d}\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a:

- $\mathrm{R}_f = \mathbb{S}^m \setminus f(\mathrm{C}_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset \mathrm{R}_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con b $\implies$ $f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien $\emptyset$).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} \mathrm{d}\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (I)

Lema

Sea $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ diferenciable. Sea ω una m-forma en $\mathbb{S}^m$ con $\int_{\mathbb{S}^m} \omega = 1$. Sea α una primitiva de $f^*\omega$. Sean $a \in \mathbb{S}^m$ un valor regular de f y $M_a = f^{-1}(a)$, orientada según la orientación inducida. Entonces,

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha.$$

Demostración. Primero, $\int_{M_a} \alpha = \int_{M_b} \alpha$ para todo b en un entorno de a:

- $\mathrm{R}_f = \mathbb{S}^m \setminus f(\mathrm{C}_f)$ es abierto, escogemos $a \in U \subset \mathrm{R}_f$ ($U \equiv \mathbb{R}^n$).
- Para cada $b \in U$, existe un camino diferenciable γ que une a con b $\implies$ $f^{-1}(\gamma)$ subvariedad compacta orientada de dimensión m con borde $M_a \cup M_b$ (o bien $\emptyset$).
- Aplicando Stokes:

$$\int_{M_a} \alpha - \int_{M_b} \alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} \mathrm{d}\alpha = \int_{f^{-1}(\gamma)} f^*\omega = 0.$$

Otra fórmula integral (II)

Fibración de Ehresmann aplicada a $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$:

$$\begin{tikzcd} M_a \times U \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Ahora, supongamos que $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U \implies \operatorname{supp}(\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha) \subseteq f^{-1}(U)$. Así:

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(f) = \int_{f^{-1}(U)} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha &= \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge h^*\mathrm{d}\alpha = \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge h^* f^* \omega \\ &= \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge \pi_U^*\omega = \int_U \left(\int_{M_a \times \{\bullet\}} h^*\alpha|_{M_a \times \{\bullet\}} \right) \omega \\ &= \int_U \left(\int_{M_\bullet} \alpha \right) \omega = \left(\int_{M_a} \alpha \right) \underbrace{\left(\int_U \omega \right)}_{=1} = \int_{M_a} \alpha. \end{aligned}$$

Otra fórmula integral (II)

Fibración de Ehresmann aplicada a $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$:

$$\begin{tikzcd} M_a \times U \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Ahora, supongamos que $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U \implies \operatorname{supp}(\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha) \subseteq f^{-1}(U)$. Así:

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(f) = \int_{f^{-1}(U)} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha &= \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge h^*\mathrm{d}\alpha = \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge h^* f^*\omega \\ &= \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge \pi_U^*\omega = \int_U \left(\int_{M_a \times \{\bullet\}} h^*\alpha|_{M_a \times \{\bullet\}} \right) \omega \\ &= \int_U \left(\int_{M_\bullet} \alpha \right) \omega = \left(\int_{M_a} \alpha \right) \underbrace{\left(\int_U \omega \right)}_{=1} = \int_{M_a} \alpha. \end{aligned}$$

Otra fórmula integral (II)

Fibración de Ehresmann aplicada a $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$:

$$\begin{tikzcd}
M_a \times U \arrow[rr, "h", "\approx"'] \arrow[dr, "\pi_U"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Ahora, supongamos que $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq U \implies \operatorname{supp}(\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha) \subseteq f^{-1}(U)$. Así:

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}(f) = \int_{f^{-1}(U)} \alpha \wedge \mathrm{d}\alpha &= \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge h^*\mathrm{d}\alpha = \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge h^* f^* \omega \\
&= \int_{M_a \times U} h^*\alpha \wedge \pi_U^*\omega = \int_U \left(\int_{M_a \times \{\bullet\}} h^*\alpha|_{M_a \times \{\bullet\}} \right) \omega \\
&= \int_U \left(\int_{M_\bullet} \alpha \right) \omega = \left(\int_{M_a} \alpha \right) \underbrace{\left(\int_U \omega \right)}_{=1} = \int_{M_a} \alpha.
\end{aligned}$$

Otra fórmula integral (III)

Finalmente, si $\operatorname{supp}(\omega) \not\subseteq U$, tomamos ω' con soporte en U e integral 1 $\implies \omega' = \omega + \mathrm{d}\beta$.

$\alpha' = \alpha + f^*\beta$ es una primitiva de $f^*\omega'$. Así:

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha' = \int_{M_a} \alpha + \int_{M_a} f^*\beta = \int_{M_a} \alpha,$$

pues, para todo $x \in M_a$, $(f^*\beta)_x$ es nula al evaluarla sobre vectores de $\mathrm{T}_x M_a = \ker \mathrm{d}_x f$. $\square$

Otra fórmula integral (III)

Finalmente, si $\mathrm{supp}(\omega) \not\subseteq U$, tomamos ω' con soporte en U e integral 1 $\implies \omega' = \omega + \mathrm{d}\beta$.

$\alpha' = \alpha + f^*\beta$ es una primitiva de $f^*\omega'$. Así:

$$\mathrm{h}(f) = \int_{M_a} \alpha' = \int_{M_a} \alpha + \int_{M_a} f^*\beta = \int_{M_a} \alpha,$$

pues, para todo $x \in M_a$, $(f^*\beta)_x$ es nula al evaluarla sobre vectores de $\mathrm{T}_x M_a = \ker \mathrm{d}_x f$. $\square$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0,1] \times M_a \to \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t,x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv |_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0,1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* \mathrm{d}\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0,1] \times M_a \to \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t,x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv |_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0,1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* \mathrm{d}\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0,1] \times M_a \to \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t,x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv|_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0,1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* \mathrm{d}\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0,1] \times M_a \to \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t,x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv|_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0,1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* \mathrm{d}\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero

Proposición

El invariante de Hopf de cualquier $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ es un número entero.

Demostración. Sean a un valor regular y $M_a = f^{-1}(a)$. Tomamos $c \notin M_a$. La homotopía

$$H : [0,1] \times M_a \to \mathbb{S}^{2m-1}, \quad (t,x) \mapsto \frac{(1-t)x + t(-c)}{\|(1-t)x + t(-c)\|}$$

une $H_0 : M_a \hookrightarrow \mathbb{S}^{2m-1}$ con $H_1 \equiv -c$. Además, $H_0^* \equiv|_{M_a}$, $H_1^* \equiv 0$.

Usando Stokes y escribiendo $N = [0,1] \times M_a$,

$$\int_{M_a} \alpha = \int_{M_a} H_0^* \alpha - \int_{M_a} H_1^* \alpha = \int_{\partial N} H^* \alpha = \int_N H^* \mathrm{d}\alpha = \int_N (f \circ H)^* \omega.$$

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \to \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathrm{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
$\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p!)
- De hecho, existen $W_1, \ldots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W, $\mathrm{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\int_N (f \circ H)^*\omega = \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega$$
$$= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).$$

$\square$

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \to \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathrm{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
  $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p!)
- De hecho, existen $W_1, \ldots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W, $\operatorname{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\int_N (f \circ H)^*\omega = \int_{(f\circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega$$
$$= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).$$

□

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \to \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathrm{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
  $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p!)
- De hecho, existen $W_1, \ldots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W, $\mathrm{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\int_N (f \circ H)^*\omega = \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega$$
$$= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).$$

□

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \to \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathrm{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
  $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p!)
- De hecho, existen $W_1, \ldots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^{r} W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W, $\mathrm{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\int_N (f \circ H)^*\omega = \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^{r} \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^{r} (\pm 1).$$

$\square$

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \to \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathrm{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
  $\Longrightarrow (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p!)
- De hecho, existen $W_1, \ldots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W, $\operatorname{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\int_N (f \circ H)^*\omega = \int_{(f \circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega$$

$$= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).$$

$\square$

El invariante es un número entero (II)

Para concluir:

- $f \circ H : N \to \mathbb{S}^m$ entre variedades compactas de la misma dimensión.
- T. Sard: existe $p \in \mathrm{R}_f \setminus \{a, f(-c)\}$
  $\implies (f \circ H)^{-1}(p) = \{q_1, \ldots, q_r\}$ (¡y $q_k \notin \partial N$ por la elección de p!)
- De hecho, existen $W_1, \ldots, W_r \subseteq N$ abiertos disjuntos y W entorno abierto de p tales que $f^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^r W_k$ y $(f \circ H)|_{W_k} : W_k \approx W$.
- Si tomamos ω con soporte en W, $\operatorname{supp}((f \circ H)^*\omega) \subseteq \bigcup_k W_k$, y

$$\int_N (f \circ H)^*\omega = \int_{(f\circ H)^{-1}(W)} (f \circ H)^*\omega = \sum_{k=1}^r \int_{W_k} (f \circ H)^*\omega$$
$$= \sum_{k=1}^r \left(\pm \int_W \omega \right) = \sum_{k=1}^r (\pm 1).$$

□

Fibraciones de Hopf

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva $\mathbb{FP}^1$: cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos $\mathbb{FP}^1$ con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{FP}^1$ restringido a $\mathbb{S}^{2m-1}$:

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva $\mathbb{FP}^1$: cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos $\mathbb{FP}^1$ con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{FP}^1$ restringido a $\mathbb{S}^{2m-1}$:

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva $\mathbb{FP}^1$: cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos $\mathbb{FP}^1$ con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{FP}^1$ restringido a $\mathbb{S}^{2m-1}$:

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva $\mathbb{FP}^1$: cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos $\mathbb{FP}^1$ con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{FP}^1$ restringido a $\mathbb{S}^{2m-1}$:

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Las fibraciones de Hopf

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$. $\mathbb{F}^2 \equiv \mathbb{R}^{2m}$, $m = 1, 2, 4, 8$.

Recta proyectiva $\mathbb{FP}^1$: cociente de $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\}$ por la relación de equivalencia

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \iff \begin{cases} z_1^{-1} z_0 = w_1^{-1} w_0, & \text{si } z_1, w_1 \neq 0, \\ z_1 = w_1 = 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si equipamos $\mathbb{FP}^1$ con la topología cociente, $\mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{F}_\infty \equiv \mathbb{S}^m$.

Fibraciones de Hopf: el paso al cociente $\mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{FP}^1$ restringido a $\mathbb{S}^{2m-1}$:

$$p|_{\mathbb{S}^{2m-1}} : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{FP}^1 \equiv \mathbb{S}^m,$$

visto como una aplicación $f : \mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{S}^m$ (sigue siendo sobreyectiva).

¡Tienen invariante de Hopf 1!

Fibración de Hopf compleja

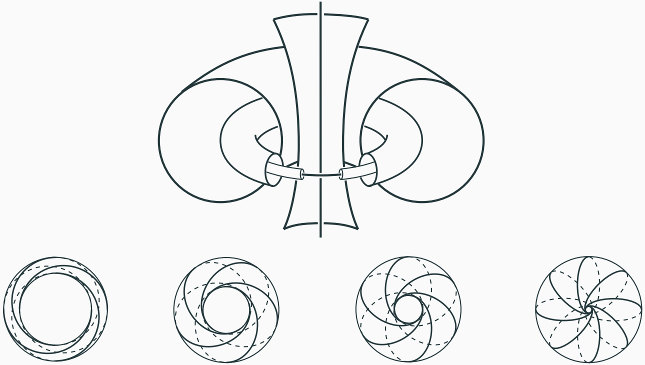

Fig. 1: Imagen mediante proyección estereográfica $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ de los toros formados por las fibras de la fibración de Hopf compleja $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \to_f \mathbb{S}^2$ (figura tomada de [Hat], §4.2, ejemplo 4.45).

Bibliografía

- Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology.* Cambridge University Press.
- Outerelo, E., & Ruiz, J. M. (2009). *Mapping Degree Theory.* American Mathematical Society.
- Whitney, H. (1957). *Geometric integration theory*. Princeton University Press.

Muchas gracias.